

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет наук о материалах

УТВЕРЖДАЮ
Зам. декана ФНМ по учебной
работе
_____/А.В. Кнотько /
«__» _____ 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Теория вероятностей и математическая статистика

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки:

04.03.02 Химия, физика и механика материалов

Направленность (профиль)/специализация ОПОП:

общий

Форма обучения:

очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
Методической комиссией факультета наук о материалах
(протокол №_____, дата)

Москва 2016

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Химия, физика и механика материалов» (программы бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки) в редакции приказа МГУ от _____20__ г.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО: базовая часть, общенаучная подготовка, модуль «Математика», курс предназначен для студентов факультета наук о материалах **2-го года обучения (3-й семестр)**, курс является обязательным

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия (если есть):

Математический анализ

3. Результаты обучения по дисциплине:

Знать:

- основные понятия теории вероятностей
- основные элементы комбинаторного анализа
- основные модели теории вероятностей и возможности их применения
- наиболее часто используемые распределения и их свойства

Уметь:

- формализовать задачу
- выбрать подходящую модель, распределение
- применять изученные теоремы на практике

4. Объем дисциплины составляет 2 з.е. (72 ак.ч.)

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:

5.1. Структура дисциплины по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Вид работы	Семестр				Всего
	2				
Общая трудоёмкость, акад. Часов	72				72
Аудиторная работа:	54				54
Лекции, акад. Часов	18				18
Семинары, акад. Часов	36				36
Лабораторные работы, акад. часов					
Самостоятельная работа, акад. Часов	18				18
Вид итогового контроля (зачёт, экзамен)	Зач.				

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

1. События и их вероятности (6 часов). Дискретное вероятностное пространство. Классическое определение вероятностей. События. Операции над событиями. Вероятности событий, их простейшие свойства. Формула для вероятности объединения конечного числа событий. Условные вероятности. Формула произведения. Разбиение вероятностного пространства. Формулы полной вероятности и Байеса. Определение независимости событий.

2. Понятие о случайной величине и ее распределении (8 часов). Определение случайной величины (с.в.), заданной на дискретном вероятностном пространстве. Распределение дискретной с.в.. Индикаторы событий. Определение математического ожидания дискретной с.в.. Формула для подсчета и общие свойства математического ожидания.

Дисперсия и ее свойства. Независимость дискретных с.в.. Утверждение о математическом ожидании произведения независимых с.в..

3. Зависимые и независимые случайные величины. Предельные теоремы (10 часов). Ковариация. Некоррелированность. Коэффициент корреляции как мера зависимости с.в.. Соотношение между некоррелированностью и независимостью. Дисперсия суммы. Случай независимых слагаемых. Неравенства Чебышева. Закон больших чисел. Последовательность независимых испытаний Бернулли. Распределение числа успехов в серии из n независимых испытаний Бернулли, его среднее и дисперсия. Предельная теорема Муавра-Лапласа. Нормальное (гауссовское) распределение. Центральная предельная теорема. Предельная теорема Пуассона. Пуассоновское распределение.

4. Распределения одной и нескольких случайных величин (8 часов). Функция распределения с.в.. Непрерывные и абсолютно непрерывные с.в.. Плотность. Формулы для математического ожидания и дисперсии абсолютно непрерывной с.в.. Совместная функция распределения нескольких с.в.. Совместная плотность. Формула для подсчета вероятности попадания в область. Математическое ожидание функции от нескольких с.в. через совместную плотность. Вид совместной функции распределения и совместной плотности независимых с.в. Математическое ожидание произведения независимых с.в.. Формула свертки.

5. Оценивание неизвестных параметров распределения по выборке (10 часов). Выборка. Пример: результаты измерений, систематические и случайные ошибки. Эмпирическая функция распределения. Гистограмма. Выборочное среднее и выборочная дисперсия, их несмещенность. Понятие оценки параметров распределения. Несмещенность, состоятельность. Исклучение выбросов измерений. Понятие эффективности оценок. Сравнение несмещенных оценок. Метод моментов для получения оценок параметров. Пример выборки из нормального распределения. Состоятельность оценок полученных по методу моментов. Ранговая корреляция. Оценки наибольшего правдоподобия. Метод наименьших квадратов. Пример выборки из нормального распределения.

6. Доверительные интервалы (6 часов). Понятие доверительного интервала. Метод построения доверительных интервалов. Распределения, связанные с нормальным: хи-квадрат, распределение Стюдента. Понятие квантили. Доверительные интервалы для среднего в случае выборки из нормального распределения с известной и неизвестной дисперсией. Доверительные интервалы для дисперсии в случае выборки из нормального распределения с известным и неизвестным средним.

7. Статистические гипотезы (6 часов). Проверка гипотез. Критическое множество. Простые и сложные гипотезы. Ошибка 1-го рода. Теорема Пирсона. Непараметрический критерий согласия Пирсона. Понятие о проверке основной простой гипотезы при простой альтернативе. Ошибка 2-го рода. Критерий, основанный на отношении правдоподобия.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Примеры домашних заданий

1. Грани тетраэдра последовательно раскрашиваются в цвета: красный, зеленый, синий, а четвертая грань во все эти 3 цвета. Далее тетраэдр подбрасываем и смотрим, какой цвет присутствует на грани, на которую он упал. Будут ли

независимыми события

{есть красный цвет}, {есть зеленый цвет}, {есть синий цвет}?

2. Бросается игральная кость 2 раза. Событие А состоит в том, что во второй раз выпала 1,2,5; событие В в том, что во второй раз выпала 4,5 или 6; событие С - сумма выпавших очков в двух бросаниях равна 9. Будут ли независимыми эти события?
3. Шесть шаров случайным образом раскладывают в 3 ящика. Найти вероятность, что во всех ящиках разное число шаров при условии, что все они не пустые.
4. В ящике 12 красных, 8 зеленых и 10 синих шаров. Наудачу вынимаются два шара. Какова вероятность, что вынутые шары разного цвета, если известно, что не вынут синий шар?
5. В прибор входит комплект из двух независимых деталей, вероятность которых выйти из строя в течение года соответственно равна 0.1 и 0.2. Если детали исправны, то прибор работает в течение года с вероятностью 0.99. Если выходит из строя только первая деталь, то прибор работает с вероятностью 0.7; а если только вторая - то с вероятностью 0.8. Если выходят из строя обе детали, прибор будет работать с вероятностью 0.1. Какова вероятность, что прибор будет работать в течение года?
6. В первой урне лежат один белый и три черных шара, а во второй урне - 2 белых и 1 черный шар. Из первой урны во вторую не глядя перекладывается один шар, затем один шар перекладывается из второй урны в первую. После этого из первой урны вынули один шар. Найти вероятность, что он белый.

1. Найти вероятность, что при 1000 подбрасываний монеты число орлов и решек совпадет
2. Два шахматиста встречались за доской 50 раз, причем 15 раз выиграл первый, второй выиграл 10, остальные закончились вничью. Найти вероятность того, что в матче из 10 партий между ними 3 партии выиграет первый, 2 партии выиграет второй, а 5 партий закончатся вничью.
3. Лифт начинает движение с 7 пассажирами и останавливается на 10 этажах. Найти вероятность того, что три пассажира вышли на одном этаже, еще два вышли на другом, последние два - на еще одном этаже.
4. В лотерее каждый сотый билет выигрышный. Сколько нужно купить билетов, чтобы с вероятностью 0.95 быть уверенным в том, что хотя бы один билет окажется выигрышным.
5. В коробке 3 детали, вероятность брака каждой детали 0.1. Какова вероятность того, что среди 10 коробок будет не менее 8 не содержащих бракованных деталей?

1. Построить график функции распределения пуассоновской случайной величины с параметром 2. Найти ее дисперсию.
2. Случайная величина равна количеству независимых испытаний Бернулли до появления первого успеха. Найти математическое ожидание и дисперсию.
3. Найти математическое ожидание гипергеометрической случайной величины (случайной величины, равной количеству бракованных деталей в выборке размером k , если всего деталей N , из которых M бракованных).
4. Подбрасываются 10 кубиков, сумму очков возводят в квадрат. Вычислить

математическое ожидание данной величины.

Примеры контрольных работ

1. Случайная величина x равномерно распределена на отрезке $[-1;1]$. Найти плотность распределения случайной величины $\log(x^2)$
2. Лаборант допускает промахи в 1% анализов. Найти вероятность того, что в серии из 1000 анализов он сделает не более пяти промахов.
3. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 5% случаев. Сколько в среднем необходимо перебрать образцов, чтобы найти хотя бы один с высоким содержанием вещества?
4. На отрезок $[2,5]$ наудачу бросаются две точки. Какова вероятность, что расстояние между ними меньше 2?
5. Случайная величина x равномерно распределена нормально с параметрами $(0,1)$. Найти плотность распределения случайной величины x^2
6. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 25% случаев. Найти вероятность того, что среди 2500 образцов окажется ровно 625 с высоким содержанием вещества.
7. В химической лаборатории установлен новый прибор со средним сроком службы 2500 рабочих дней. В предположении, что срок службы прибора имеет показательное распределение, найти вероятность того, что он прослужит более 3000 дней?
8. Семь проб вещества отправляются каждая в одну из семи лабораторий. Найти вероятность того, что все пробы попадут в разные лаборатории.

Расчетные задачи или тесты

1. В очередь в булочную случайным образом встали 8 женщин и 2 мужчин. Какова вероятность того, что между мужчинами будут стоять 2 женщины.
2. Изделие имеет скрытые дефекты с вероятностью 0,2. В течение года выходит из строя 75% изделий со скрытыми дефектами и 15% изделий без дефектов. Найти вероятность, что изделие имело скрытые дефекты, если оно вышло из строя в течение года.
3. Учебник издан тиражом в 10000 экземпляров. Вероятность того, что экземпляр учебника сброшюрован неправильно равна 0,0001. С помощью предельных теорем найти вероятность того, что тираж содержит ровно 5 бракованных книг.
4. В партии из 768 арбузов каждый арбуз оказывается неспелым с вероятностью 0,25. Найти вероятность того, что количество спелых арбузов будет находиться в пределах от 564 до 600.
5. Известно, что высокое содержание некоторого вещества наблюдается в 15% случаев. Сколько в среднем необходимо перебрать образцов, чтобы найти хотя бы один с высоким содержанием вещества?
6. Случайная величина ξ равномерно распределена на отрезке $[1,3]$. Найти плотность распределения случайной величины $\xi^2 + 1$.

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

1. Детерминированные и случайные явления. Случайный эксперимент. Статистическая устойчивость частот. Формализация вероятностной задачи. Вероятностное пространство. Случайные события. Операции над событиями. Связь вероятностной терминологии с теоретико-множественной терминологией. Промежуточные меры. Дискретные и произвольные

пространства элементарных исходов (ПЭИ). Алгебра и сигма-алгебра событий.

2. Вероятность (вероятностная мера) в дискретном ПЭИ. Аксиомы. Примеры задания вероятности в дискретном ПЭИ. Теорема сложения и ее обобщения. Классическое и статистическое определения вероятности. Примеры.
3. Элементы комбинаторного анализа. Правило умножения и правило сложения комбинаторики. Выборки из генеральной совокупности. Размещения частиц по ячейкам. Использование классического определения вероятности для построения вероятностных пространств, в которых элементами ПЭИ являются различные выборки и размещения. Гипергеометрическое распределение. Разбиение конечного множества на подмножества с заданным количеством элементов.
4. Вероятность (вероятностная мера) в произвольном ПЭИ. Аксиомы теории вероятностей. Геометрические вероятности. Парадокс Бертрانا. Свойства вероятности, вытекающие из аксиом. Примеры.
5. Условные вероятности. Теорема умножения. Независимость событий. Независимость событий в совокупности. Пример С.Н.Бернштейна. Формула полной вероятности. Формула Байеса. Примеры.
6. Последовательность независимых испытаний с двумя исходами (схема Бернулли). Вероятностное пространство для схемы Бернулли. Биномиальное распределение. Последовательность независимых испытаний с N ($N > 2$) исходами (полиномиальная схема). Примеры.
7. Предельные теоремы в схеме Бернулли, Теорема Пуассона. Распределение Пуассона. Локальная предельная теорема Муавра (без док-ва). Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа (без док-ва). Примеры применения теорем.
8. Случайная величина (определения). Функция распределения. Распределение вероятностей. Свойства функции распределения (поведение в бесконечности и непрерывность слева - без док-ва).
9. Дискретные случайные величины (распределения). Функция распределения.
10. Примеры: вырожденное, дискретное равномерное, бернуллиевское, биномиальное, пуассоновское, геометрическое, гипергеометрическое распределения; распределение Паскаля. Содержательный смысл указанных распределений.
11. Абсолютно непрерывные случайные величины (распределения). Функция распределения. Плотность распределения. Примеры: равномерное распределение на отрезке, нормальное распределение с параметрами (a, b) , стандартное нормальное распределение, показательное распределение (свойство отсутствия последствий), распределение Коши. Содержательный смысл указанных распределений.
12. Многомерные распределения. Функция распределения случайного вектора и ее свойства (без док-ва). Дискретные и абсолютно непрерывные многомерные распределения. Плотность распределения. Примеры: равномерное распределение в области на плоскости, двумерное нормальное распределение, дискретное распределение на конечном множестве точек плоскости. Связь маргинальных (одномерных) распределений с совместным распределением.
13. Независимость случайных величин (определения). Необходимые и достаточные условия независимости дискретных и абсолютно непрерывных случайных величин (без док-ва).
14. Функции от случайных величин. Пример: нахождение плотности распределения квадрата нормальной стандартной случайной величины (распределение хи-квадрат с одной степенью свободы). Преобразование n -мерного случайного вектора в m -мерный. Формула композиции (свертка). Примеры: распределение суммы двух нормальных, двух пуассоновских, двух биномиальных независимых случайных величин.
15. Числовые характеристики случайных величин. Математическое ожидание.
16. Формулы для вычисления математического ожидания функций от случайных величин (без док-ва). Свойства математического ожидания. Дисперсия, ковариация, коэффициент корреляции. Их свойства. Дисперсия линейной комбинации n произвольных случайных

величин. Связь между независимостью и не-коррелированностью. Примеры. Матрица ковариаций n -мерного случайного вектора.

17. Неравенства Маркова и Чебышева. Примеры применения. Сходимость по вероятности. Закон больших чисел. Достаточные условия применимости закона больших чисел: теоремы Маркова, Чебышева и Бернулли. Примеры.
18. Сходимость по распределению (слабая сходимость). Центральная предельная теорема (различные достаточные условия выполнения теоремы - без док-ва). Примеры применения. Понятие асимптотической нормальности. Интегральная предельная теорема Муавра-Лапласа как частный случай центральной предельной теоремы.
19. Теорема Слуцкого и теорема о сходимости (без док-ва). Приближенные доверительные интервалы для оценки неизвестной вероятности успеха по частоте в схеме Бернулли. Примеры. Многомерное нормальное распределение.

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература:

1. В. П. Чистяков, Курс теории вероятностей, 7-е изд., Дрофа, Москва, 2007, 256 с.
2. Гнеденко Б.В. Курс теории вероятностей. 8-е изд., испр. и доп.—М.: Едиториал УРСС, 2005.— 448 с.
3. А.Зубков, Б.Севастьянов, В.Чистяков. Сборник задач по теории вероятностей. Учеб. пособие для вузов. — 2-е изд., испр. и доп. — М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит. — 1989. — 320 с. — ISBN 5-02-013949-1.
4. В.Н.Тутубалин, Теория вероятностей и случайных процессов. Основы математического аппарата и прикладные аспекты, М., МГУ, 1992.

Интернет-ресурсы

1. М.М.Мусин, С.Г.Кобельков, А.А.Голдаева (под редакцией А.В.Лебедева) Сборник задач по теории вероятностей для химиков, 2013
<http://www.math.msu.su/departments/probab/index-k.html>
2. А.Д.Манита. Теория вероятностей и математическая статистика.
<http://teorver-online.narod.ru/>

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства (подлежит обновлению при необходимости)

7.3. Описание материально-технического обеспечения.

аудитория с доской, компьютерный проектор

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы.

к.ф.-м.н. А.Д. Манита