Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет наук о материалах

УТВЕРЖДАЮ
Зам. декана ФНМ по учебной работе
____________/А.В. Кнотько /
«__» _____________2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Математический анализ

Уровень высшего образования:
бакалавриат

Направление подготовки:

04.03.02 Химия, физика и механика материалов

Направленность (профиль)/специализация ОПОП:

общий

Форма обучения:
очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена

Методической комиссией факультета наук о материалах

(протокол №_________, дата)

Москва 2016

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Химия, физика и механика материалов» (программы бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки) в редакции приказа МГУ от ___________20___ г.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО: Базовая часть, общенаучная подготовка, модуль «Математика», курс предназначен для студентов факультета наук о материалах **1 и 2-го года обучения (1, 2 и 3-й семестр),** курс является обязательным

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия (если есть):

отсутствуют

3. Результаты обучения по дисциплине:
Знать: основные понятия и теоремы дифференциального и интегрального исчислений функций одной и нескольких переменных, в т.ч. теорию пределов, свойства непрерывных и дифференцируемых функций, формулу Тейлора, определённые, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, числовые и функциональные ряды
Уметь: оперировать с основными понятиями дифференциального и интегрального исчислений, доказывать основные теоремы, решать типовые задачи, в том числе дифференцировать, интегрировать элементарные функции, строить эскизы графиков таких функций, решать задачи на экстремум функций одной и нескольких переменных, вычислять простейшие определённые, кратные, криволинейные и поверхностные интегралы, исследовать сходимость рядов, разлагать функции в ряд Фурье и ряд Тейлора
Владеть: фундаментальными разделами математики, необходимыми для решения научно-исследовательских и практических задач в профессиональной области, способностью корректно интерпретировать математические модели простейших типовых профессиональных и использовать их в профессиональной деятельности
Иметь опыт: в применении базовых концепций и понятий математического анализа при решении типовых задач

4. Объем дисциплины составляет 10 з.е. (360 ак.ч.)

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:
5.1. Структура дисциплины по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Вид работы	**Семестр**				**Всего**
	1	**2**	**3**		
Общая трудоёмкость, акад. Часов	144	108	108		360
Аудиторная работа:	108	80	72		260
Лекции, акад. Часов	72	48	36		156
Семинары, акад. Часов	36	32	36		104
Лабораторные работы, акад. часов					
Самостоятельная работа, акад. Часов	36	28	36		100
Вид итогового контроля (зачёт, экзамен)	Экз.	Экз.	Экз.		

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

1. Введение (6 часов). Что такое математический анализ. Логическая символика. Основные понятия, связанные с теорией множеств и отображений: подмножества, объединение и пересечение множеств, разность и дополнение множеств, прямое произведение множеств; отображение, образ и прообраз точки и множества, график отображения, сужение и продолжение

отображения, композиция отображений, сюръекция, инъекция и биекция, обратное отображение. Понятие о мощности множества. Счетные множества. Континуум.

2. Основные свойства множества R действительных чисел и множества C комплексных чисел (8 часов). Полнота R. Верхняя и нижняя грани подмножеств из R. Окрестности и их свойства. Предельные точки,изолированные точки подмножества из R. Леммы: о вложенных отрезках, о конечном подпокрытии, о предельной точке. Основные свойства множества C.

3. Предел числовой (действительной и комплексной) последовательности (12 часов). Определение предела числовой последовательности. Единственность предела. Исчезающие (бесконечно малые) последовательности. Бесконечный предел. Арифметические теоремы о пределах. Свойства предела, связанные с неравенствами. Предел монотонной последовательности. Число e. Частичные пределы. Верхний и нижний пределы. Критерий Коши. Аппроксимативный смысл предела.

4. Числовые ряды с действительными и с комплексными слагаемыми (12 часов). Сходимость и расходимость ряда. Сумма ряда. Основные свойства числовых рядов. Абсолютная и условная сходимость. Признаки сходимости – необходимое условие сходимости, критерий Коши, признаки сравнения, признаки Даламбера, Коши, Дирихле, Лейбница, Абеля. Коммутативность и ассоциативность в числовых рядах. Умножение рядов. Экспонента. Использование рядов в аппроксимационных задачах.

5. Общая теория предела (12 часов). Предел функции при произвольной базе. Основные свойства предела при произвольной базе. Критерий Коши. Сравнение баз. Предел функции действительной переменной. Равносильность понятий предела по Коши и по Гейне. Предел композиции. Сравнение исчезающих (бесконечно малых), сравнение бесконечно больших.

6. Непрерывность функции действительной переменной (12 часов). Определение непрерывности. Разрывы, их классификация. Монотонные функции и свойства их разрывов. Локальные свойства непрерывных функций. Глобальные свойства непрерывных функций: ограниченность и достижение крайних значений функции на отрезке, теорема о промежуточных значениях. Непрерывность обратной функции. Непрерывность элементарных функций. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора о равномерной непрерывности функции, непрерывной на отрезке.

7. Дифференцируемые функции действительной переменной (10 часов). Производная и дифференциал. Определение, геометрический и механический смысл производной. Таблица производных простейших функций. Свойства, связанные со знаком производной. Теорема Ферма о необходимом условии экстремума.Теоремы о промежуточном значении – Ролль, Коши, Лагранж. Монотонность дифференцируемых функций. Простейшее достаточное условие экстремума.

8. Классы гладкости C^{s}, C^{∞} для функций одной действительной переменной (16 часов). Производные старших порядков. Определение классов гладкости C^{s}, C^{∞}. Формула Тейлора, ее вывод, различные представления остатка в формуле Тейлора (Пеано, Лагранж). Вычисление пределов с помощью дифференциального исчисления (формула Тейлора, правила Лопиталя). Достаточные условия экстремума функции. Выпуклость дифференцируемых функций. Исследование функций и построение их графиков с помощью дифференциального исчисления. Кривые, заданные параметрически. Механическая интерпретация. Элементы дифференциальной геометрии кривых. Кривизна и кручение. Формулы Френе. Приближенные вычисления с помощью формулы Тейлора.

9. Неопределенный интеграл (12 часов). Первообразные. Неопределенный интеграл. Замена переменных в неопределенном интеграле. Интегрирование по частям. Важнейшие методы интегрирования элементарных функций. Приложения.

10. Определенный интеграл (14 часов). Определение интеграла Римана. Критерий интегрируемости. Классы интегрируемых функций. Основные свойства определенного интеграла. Теоремы о среднем значении. Интеграл как функция переменного верхнего предела. Формула Ньютона-Лейбница. Способы вычисления определенного интеграла. Формула Тейлора с остатком в интегральной форме. Ряд Тейлора. Приближенное вычисление определенных интегралов. Формула Симпсона. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.

11. Несобственные интегралы (8 часов). Несобственные интегралы – определения, признаки сходимости. Связь с числовыми рядами. Интегральный признак сходимости числовых рядов.
12. Важнейшие пространства математического анализа (8 часов). Топологические, метрические, полные метрические пространства. Нормированные, банаховы пространства. Линейные операторы. Гильбертовы пространства.
13. Предел и непрерывность функции нескольких действительных переменных (8 часов). База окрестностей в R^n . Предел функции нескольких действительных переменных. Локальные и глобальные свойства непрерывных функций нескольких переменных.
14. Дифференциальное исчисление функций нескольких действительных переменных (12 часов). Дифференцируемость. Частные производные. Достаточное условие дифференцируемости. Дифференцирование композиции. Производная по направлению. Градиент. Теорема о конечном приращении. Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
15. Классы гладкости C^S, C^{∞} для функций нескольких действительных переменных (12 часов). Классы гладкости C^S, C^{∞}. Многомерная формула Тейлора. Внутренние локальные экстремумы. Необходимое условие. Достаточное условие. Теоремы о неявной функции и о неявном отображении. Теорема об обратном отображении. Условный экстремум. Необходимое условие. Достаточное условие. Функция Лагранжа.
16. Двойной интеграл (10 часов). Квадрируемость, плоская мера Жордана – площадь плоской фигуры. Определение и простейшие свойства двойного интеграла. Теоремы о среднем. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и физические приложения двойного интеграла.
17. Тройной интеграл (10 часов). Кубируемость, трехмерная мера Жордана – объем трехмерного тела. Определение тройного интеграла, его простейшие свойства. Способы вычисления тройного интеграла. Геометрические и физические приложения тройного интеграла. Понятие об n-мерном интеграле.
18. Криволинейные интегралы первого и второго рода (12 часов). Длина кривой, способы ее вычисления. Ориентация кривой. Криволинейные интегралы первого и второго рода. Определения, основные свойства, способы вычисления, геометрическая и физическая интерпретации. Формула Грина. Независимость величины криволинейного интеграла второго рода от формы пути. Потенциал. Геометрические и физические приложения криволинейных интегралов.
19. Поверхностные интегралы первого и второго рода (14 часов). Площадь поверхности, способы ее вычисления. Ориентация поверхности Согласованность ориентации поверхности и ориентации ее края. Ориентируемые и неориентируемые поверхности. Поверхностные интегралы первого и второго рода. Определения, основные свойства, способы вычисления, физическая интерпретация. Формула Гаусса-Остроградского. Формула Стокса. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от формы пути. Потенциал. Формула Ньютона-Лейбница для криволинейного интеграла. Геометрические и физические приложения поверхностных интегралов. Понятие о многообразиях, дифференциальных формах и общей формуле Стокса.
20. Элементы векторного анализа (8 часов). Скалярные и векторные поля. Градиент, ротор, дивергенция. Поток векторного поля, циркуляция. Потенциальные и соленоидальные поля, скалярный и векторный потенциалы. Физическая интерпретация понятий векторного анализа.
21. Функциональные ряды (10 часов). Равномерная сходимость функциональной последовательности и функционального ряда. Критерий Коши. Необходимый признак равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса и другие достаточные признаки равномерной сходимости (Лейбниц, Абель, Дирихле). Предел и непрерывность суммы функционального ряда. Интегрирование и дифференцирование суммы функционального ряда. Аппроксимационные задачи.
22. Степенные ряды (12 часов). Радиус сходимости. Равномерная сходимость степенного ряда. Непрерывность его суммы. Интегрирование и дифференцирование суммы степенного ряда. Степенной ряд как ряд Тейлора. Аналитичность суммы степеного ряда. Степенные разложения простейших функций. Использование степенных рядов в аппроксимационных задачах.

23. Ряды Фурье (10 часов). Разложение периодической функции с произвольным периодом в тригонометрический ряд. Коэффициенты Фурье. Достаточные признаки сходимости рядов Фурье. Полнота тригонометрической системы. Разложения только по косинусам или только по синусам. Равномерное приближение непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими полиномами.
24. Интегралы, зависящие от параметра (12 часов). Непрерывность по параметру римановского интеграла. Интегрирование и дифференцирование по параметру римановского интеграла. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость несобственного интеграла с параметром. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность по параметру несобственного интеграла. Интегрирование и дифференцирование по параметру несобственного интеграла. Вычисление интеграла Эйлера-Пуассона и интеграла Дирихле. Г-функция и В-функция – определения, основные свойства, формулы для их вычисления.

Примерное распределение материала по семестрам таково: в первом семестре – разделы 1 – 9, во втором – 10 – 17, в третьем – 18 – 24. Некоторые теоремы могут быть лектором даны без доказательства. Распределение материала по семестрам, как и порядок изложения материала имеет здесь ориентировочный характер и может быть изменено лектором в зависимости от конкретной обстановки того или иного учебного года. Это относится и к указанному в скобках после наименования разделов количеству часов на каждый раздел предмета.

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Для текущего контроля успеваемости учащимся предлагаются задания, собранные в рубежные контрольные работы, проводимые примерно через каждые 6 недель. Эти задания будут примерно соответствовать задачам, предложенным в [Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: МГУ, 1997].. Экзаменационные билеты содержат теоретические вопросы и задачи, подобные тем, что были включены в контрольные работы.

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Вопросы экзамена:

1. Предел последовательности. Критерий Коши.
2. Теорема о существовании предела у монотонной ограниченной последовательности.
3. Число e: доказательство существования предела последовательности $(1 + 1 / n)^n$ и равенства $e = \lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}$.
4. Предел функции. Эквивалентность определений предела по Коши и по Гейне.
5. Свойства функций, непрерывных на сегменте: две теоремы Больцано-Коши и две теоремы Вейерштрасса (ФГМ, 80, 82, 84, 85).
6. Обозначения Лейбница для производных, формулы $\frac{dy}{dx} = \frac{\dot y}{\dot x}$ и $\frac{d^2y}{dx^2} \neq \frac{\ddot y}{\dot x^2}$.
7. Теорема Лагранжа о среднем значении, ее доказательство через теорему Ролля и геометрическая интерпретация.
8. Теорема Коши о среднем значении, ее доказательство через теорему Ролля и геометрическая интерпретация.

9. Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Лагранжа.
10. Формула Тейлора для функции одной переменной с остаточным членом в форме Пеано.
11. Касательная прямая и различные подходы к ее определению.
12. Выпуклость графика функции.
13. Достаточные условия локального экстремума функции 1-ой переменной.
14. Правила дифференцирования сложной и обратной функции. Алгоритм дифференцирования составных элементарных функций.
15. Правило Лопиталя.
16. Дифференцирование сложной функции $f(x(t),y(t))$.
17. Формула Тейлора для функции двух переменных.
18. Теорема о смешанных производных.
19. Достаточные условия локального экстремума функции 2-х переменных.
20. Изображение функции двух переменных на плоскости. Линии уровня. Градиент. Производная по направлению.
21. Теорема о существовании определенного интеграла от непрерывной функции.
22. Дифференцирование определенного интеграла по верхнему пределу:
$$\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = f(x)$$
23. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$.
24. Теорема об интегрировании равномерно сходящегося функционального ряда.
25. Теорема о разложении гладкой функции в ряд Тейлора.
26. Лемма Римана.
27. Теорема о разложении гладкой функции в ряд Фурье.
28. Явление Гиббса
29. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации полиномами.
30. Функция Вейерштрасса.
31. Функция Прингсхейма.
32. Разложение дифференцируемой периодической функции в ряд Фурье.
33. Теорема Вейерштрасса об аппроксимации функции полиномами.
34. Сведение двойного интеграла к повторному.
35. Замена переменных в двойном интеграле.
36. Формула Грина и различные формы ее записи.
37. Определение площади поверхности. Сапог Шварца.
38. Формулы для вычисления площади поверхности.
39. Поверхностные интегралы. Поток векторного поля через поверхность. Формула Гаусса-Остроградского.
40. Ориентируемые поверхности. Циркуляция вектора вдоль кривой. Формула Стокса.
41. Круг кривизны плоской кривой, формулы для вычисления его радиус и центра.
42. Эволюта кривой.
43. Формулы Френе для кривой в пространстве.

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1-3. ФИЗМАТЛИТ, 2001 г.
2. Демидович Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу. М.: МГУ, 1997.
3. Г.И. Архипов, В.А. Садовничий, В.Н. Чубариков, Лекции по математическому анализу, М., Высшая школа, 1999.

Дополнительная литература

1. С.М.Никольский, Курс математического анализа , М., Наука , т. 1, 1990, т.2, 1991.
2. Л.Д.Кудрявцев, Курс математического анализа , М., Высшая школа, т.1, 2, 1981.

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства (подлежит обновлению при необходимости)

Не требуется

7.3. Описание материально-технического обеспечения.

аудитория с доской, компьютерный проектор

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы.

к.ф.-м..н. Е.В. Майков, к.ф.-м.н. М.Д. Малых