

Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего образования
Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
Факультет наук о материалах

УТВЕРЖДАЮ
Зам. декана ФНМ по учебной
работе
_____/А.В. Кнотько /
«__» _____ 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

Наименование дисциплины:

Уравнения математической физики

Уровень высшего образования:

бакалавриат

Направление подготовки:

04.03.02 Химия, физика и механика материалов

Направленность (профиль)/специализация ОПОП:

общий

Форма обучения:

очная

Рабочая программа рассмотрена и одобрена
Методической комиссией факультета наук о материалах
(протокол №_____, дата)

Москва 2016

Рабочая программа дисциплины разработана в соответствии с самостоятельно установленным МГУ образовательным стандартом (ОС МГУ) для реализуемых основных профессиональных образовательных программ высшего образования по направлению подготовки «Химия, физика и механика материалов» (программы бакалавриата, магистратуры, реализуемых последовательно по схеме интегрированной подготовки) в редакции приказа МГУ от _____20__ г.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО: вариативная часть, естественнонаучная подготовка, курс предназначен для студентов факультета наук о материалах **2-го года обучения (4-й семестр)**, курс является обязательным

2. Входные требования для освоения дисциплины, предварительные условия (если есть):

Математический анализ

3. Результаты обучения по дисциплине:

Знать: типы линейных дифференциальных уравнений II порядка в частных производных;

Уметь: поставить корректные краевые задачи, получить частные и общие решения уравнений;

Владеть: методами характеристик и разделения переменных для решения задач;

Иметь опыт решения типовых задач в том числе имитирующих реальные проблемы с которыми приходится сталкиваться в практике химических исследований

4. Объем дисциплины составляет 3 з.е. (108 ак.ч.)

5. Содержание дисциплины, структурированное по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий:

5.1. Структура дисциплины по темам (разделам) с указанием отведенного на них количества академических часов и виды учебных занятий (в строгом соответствии с учебным планом)

Вид работы	Семестр				Всего
	4				
Общая трудоёмкость, акад. Часов	108				108
Аудиторная работа:	48				48
Лекции, акад. Часов	32				32
Семинары, акад. Часов	16				16
Лабораторные работы, акад. часов					
Самостоятельная работа, акад. часов	60				60
Вид итогового контроля (зачёт, экзамен)	Экз.				

5.2. Содержание разделов (тем) дисциплины

1. Уравнения с частными производными 2-го порядка (4 часов). Классификация в случае двух независимых переменных. Характеристическое уравнение и характеристики. Приведение уравнений 2-го порядка двух переменных к каноническому виду. Классификация уравнений 2-го порядка многих переменных.

2. Уравнение теплопроводности (4 часов). Физическое происхождение и вывод. 1-я и 2-я краевые задачи для уравнения теплопроводности. Метод Фурье в однородной 1-ой краевой задаче. Функция мгновенного точечного источника тепла

3. Принцип максимума для уравнения теплопроводности (4 часа). Доказательство, физический смысл. Корректность 1-ой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

4. Неоднородное уравнение теплопроводности (4 часа). Его решение. Общая 1-я краевая задача для уравнения теплопроводности.

5. Метод Фурье в однородной 2-ой краевой задаче для уравнения теплопроводности (4 часа).

6. Формула Пуассона в задаче Коши для уравнения теплопроводности (2 часа).

7. Волновое уравнение (4 часа). 1-я и 2-я краевые задачи для волнового уравнения. Формула Даламбера. Корректность задачи Коши для волнового уравнения. Случай полупрямой и метод продолжения для волнового уравнения. Метод Фурье в однородной 1-ой краевой задаче для волнового уравнения. Сохранение энергии в 1-ой краевой задаче для волнового уравнения.
8. Гармонические функции (4 часа). Оператор Лапласа. Однородные гармонические многочлены. Принцип максимума для гармонических функций. Корректность задачи Дирихле.
9. Задачи Дирихле и Неймана (6 часов). Задачи Дирихле и Неймана для круга. Формула Пуассона. Теоремы о среднем. Задача Дирихле для прямоугольника.
10. Функции Бесселя (4 часа). Уравнение Бесселя. Приложение функций Бесселя к задаче о собственных колебаниях круглой мембраны.
11. Обобщенные функции, их свойства (4 часа).
12. Дифференциальные уравнения с обобщенными функциями (4 часа).

6. Фонд оценочных средств (ФОС, оценочные и методические материалы) для оценивания результатов обучения по дисциплине (модулю).

6.1. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения текущего контроля успеваемости, критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

Найти общее решение уравнения:

$$1. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

Ответ: $U(x, y) = f(y - 2x) + g(y - 3x)$.

Решить задачи Коши:

$$2. \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, (U)_{y=x} = 2 \sin x, \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)_{y=x} = 2 \cos x$$

Ответ: $U = 5 \sin \frac{x+y}{2} - 3 \sin \frac{5x+y}{6}$.

$$3. \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, (U)_{t=0} = 0, \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{t=0} = 4x e^{-x^2}$$

Ответ: $U = e^{-(x-t)^2} - e^{-(x+t)^2} = 2e^{-(x^2+t^2)} \operatorname{ch} 2xt$.

Разложить в ряд Фурье функции:

$$4. f(x) = 4 \sin^3 x$$

Ответ: $f = 3 \sin x - \sin 3x$.

$$5. f(x) = \cos \frac{x}{2}, |x| < \pi$$

Ответ: $f = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos nx$.

Представить интегралом Фурье функцию:

$$6. f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{если } |x| < 1 \\ 0, & \text{если } |x| > 1 \end{cases}$$

Ответ: $f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos y}{y^2} \cos y x dy$.

Решить краевые задачи:

7. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, x) = 0$, $\frac{\partial U(0, x)}{\partial t} = \sin 7x$, $U(t, 0) = 0$, $U(t, \pi) = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

Ответ: $U = \frac{1}{7\alpha} \sin 7x \sin \alpha t$.

8. $\frac{\partial U}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $U(0, x) = \sin \frac{7x}{2}$, $U(t, 0) = 0$, $\frac{\partial U(t, \pi)}{\partial x} = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

Ответ: $U(t, x) = e^{-49t} \sin \frac{7x}{2}$.

Найти гармоническую в D функцию, удовлетворяющую на окружности Γ : $x^2 + y^2 = R_0^2$ условию $(U(x, y))_{\Gamma} = 4y^3$, если:

9. $D: x^2 + y^2 \leq R_0^2$

Ответ: $U = 3R_0^2 r \sin \varphi - r^3 \sin 3\varphi = 3R_0^2 y + y^3 - 3x^2 y$.

10. $D: x^2 + y^2 \geq R_0^2$

Ответ: $U = \left(\frac{R_0}{r}\right)^3 (3R_0 r^2 \sin \varphi - R_0^3 \sin 3\varphi) = R_0^4 \left[\frac{3y}{x^2 + y^2} + R_0^2 \frac{y^3 - 3x^2 y}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \right]$

1. $y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$

2. $x^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$ ($x > 0$)

3. Решить задачу Коши:

4. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, $(U)_{y=0} = 2 \sin x$, $\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)_{y=0} = 2 \cos x$

5. Построить профиль струны, то есть график $U(2, x)$, если:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad (U)_{t=0} = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi}{6} x, & \text{если } 0 < x < 6 \\ 0, & \text{если } x \leq 0 \text{ или } x \geq 6, \end{cases} \quad \left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = 0$$

Решить краевые задачи:

6. $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $(U)_{t=0} = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = \sin x$, $(U)_{x=0} = (U)_{x=\pi} = 0$, $0 < x < \pi$

7. $\frac{\partial^2 U}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, $(U)_{x=0} = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=\pi} = 0$, $(U)_{t=0} = \sin \frac{7x}{2}$

8. $\frac{\partial^2 U}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $(U)_{t=0} = x(\pi - x)$, $(U)_{x=0} = (U)_{x=\pi} = 0$, $0 < x < \pi$, $t > 0$

Найти гармоническую функцию вне круга $r_0 = 2$, если $(U)_{r=r_0} = 8 \sin^4 \frac{\varphi}{2}$.

6.2. Типовые контрольные задания или иные материалы для проведения промежуточной аттестации по дисциплине (модулю), критерии и шкалы оценивания (в отсутствие утвержденных соответствующих локальных нормативных актов на факультете)

1. Линейные уравнения второго порядка. Их характеристики. Классификация уравнений, канонические уравнения.
2. Корректные постановки задач для гиперболических, параболических, эллиптических уравнений.
3. Формула Даламбера. Корректность задачи Коши для волнового уравнения.
4. Вывод уравнения диффузии. Решение I краевой задачи методом Фурье.
5. Принцип максимума для уравнения диффузии. Его следствия.
6. Закон сохранения энергии для волнового уравнения. Его следствия.
7. Решение I краевой задачи для волнового уравнения.
8. Уравнение Лапласа. Принцип максимума для гармонических функций. Его следствия
9. Решение задачи Дирихле для круга. Интеграл Пуассона. Теоремы о среднем для гармонических функций.
10. Ортогональные системы функций и ряды Фурье.
11. Минимальное свойство коэффициентов Фурье. Неравенство Бесселя. Понятие полноты и замкнутости ортогональных систем.
12. Формулировка теоремы о сходимости тригонометрических рядов Фурье. Комплексная форма ряда Фурье.
13. Задача Штурмана-Лиувилля о собственных значениях. Свойства обственных значений и собственных функций (простота спектра, его неотрицательность, счетность (без доказательства), формулировка теоремы Стеклова).
14. Уравнение Бесселя. Функции $J_0(x)$ и $I_1(x)$ и их свойства.
15. Стационарная диффузия в полубесконечной трубке.
16. Интегральная формула Фурье. Преобразования Фурье и его свойства (линейность, преобразование Фурье производной).
17. Решение задачи Коши для уравнения диффузии методом преобразования Фурье.

Расчетные задачи или тесты

1. Определить тип уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 6 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$, его характеристики привести к каноническому виду и найти общее решение.
2. Решить задачу Коши $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0$, $U(0, x) = 0$, $\frac{\partial U(0, x)}{\partial t} = 4x e^{-x^2}$
3. Поставить I краевую задачу с неоднородными краевыми условиями в прямоугольнике $0 \leq t \leq T_0$, $0 \leq x \leq l$
 - А) для уравнения $\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$
 - Б) для уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$
- Решить краевые задачи:
 4. $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - 6 \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + 5 \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$,
 $(U)_{t=0} = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial t}\right)_{t=0} = \sin x$, $U(t, 0) = U(t, \pi) = 0$, $0 \leq x \leq \pi$
 5. $\frac{\partial U}{\partial t} = 4 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$, $(U)_{x=0} = 0$, $\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_{x=\pi} = 0$, $(U)_{t=0} = \sin \frac{x}{2}$
 6. Найти гармоническую функцию в круге радиусом $r_0 = 1$ и центром в начале координат такую, что $(U)_{r=1} = 2x^2$.

7. Ресурсное обеспечение:

7.1. Перечень основной и дополнительной литературы

Основная литература:

1. А.И. Козко, Е.С. Соболева, А.В. Субботин, Т.М. Фатеева, В.Г. Чирский, С.В. Кравцев, Н.Б. Малышева. Математические методы решения химических задач (часть II), М.: «Академия» 2013.
2. Б.П. Демидович, В.П. Моденов. Дифференциальные уравнения – С.-Пб: «Иван Федоров», 2003.
3. Е.С. Соболева, Г.М. Фатеева. Задачи и упражнения по уравнениям математической физики. –М.:Физматлит»,2012.

Дополнительная литература

1. А.В. Бицадзе, Уравнения математической физики. М., 1976.
2. А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. Уравнения математической физики. М.:»Наука», 2004.
3. Б.П.Демидович, В.П.Моденов, Методическая разработка по курсу "Уравнения математической физики", 2-е изд., М., МГУ, хим. фак., 1976.

7.2. Перечень лицензионного программного обеспечения, в том числе отечественного производства (подлежит обновлению при необходимости)

Не требуется

7.3. Описание материально-технического обеспечения.

аудитория с доской, компьютерный проектор

8. Соответствие результатов обучения по данному элементу ОПОП результатам освоения ОПОП указано в Общей характеристике ОПОП.

9. Разработчик (разработчики) программы.

к.ф.-м.н. Е.В. Майков, к.ф.-м.н. М.Д. Малых